

Láncgörbe belógására vonatkozó speciális összefüggések

2. rész

A cikk jelen része a láncgörbe ferde és vízszintes felfüggesztésre vonatkozó legnagyobb belógásai közötti új, ill. meglévő összefüggést tárgyalja az ahhoz szükséges matematikai háttér megadásával. Az aktuális összefüggés azokra a speciális esetekre vonatkozik, amikor mind a két felfüggesztéshez tartozó oszloptávolság, valamint a két láncgörbének a paramétere is azonos. Egy gyakorlati példában a meglévő, ill. új összefüggés használatával nyert eredmények kerültek összehasonlításra konkrét következtetések levonása végett.

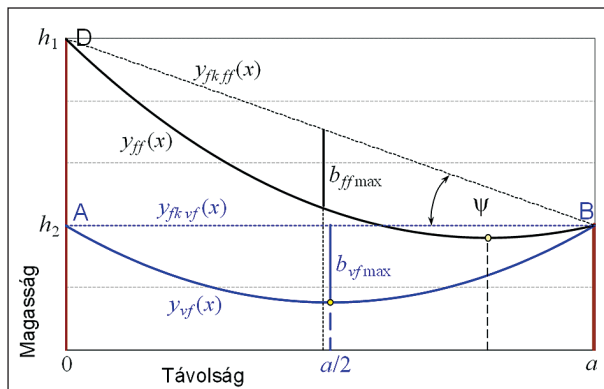
The present part of the paper discusses the relationship between the maximum sags of the catenary in inclined and level spans giving the necessary mathematical background for it. The actual relationship concerns to those special cases when the span length is the same in two spans as well as the catenary parameter. In a practical example the results got by the use of the existing and new relationships have been compared in order to draw concrete conclusions.

BEVEZETÉS

Az Elektrotechnika 2015/10 számában megjelent cikk 1. részének [1] folytatásaként a cikk 2. része a b_{ff_max} és b_{vf_max} közötti matematikai összefüggéssel foglalkozik. Az említett két jelölés a láncgörbe legnagyobb belógását jelenti ferde felfüggesztés (rövidítve ff), ill. vízszintes felfüggesztés (rövidítve vf) esetén, míg az eltérés az e két belógás között a Δb_{max} jelölést kap. Az összefüggés levezetéséhez használt bemenő adatok az alábbiak:

- a oszlopköz hossza;
- h_1 baloldali felfüggesztési pont (D) magassága;
- h_2 jobboldali felfüggesztési pont magassága;
- c láncgörbe paramétere.

A b_{ff_max} és b_{vf_max} együttes tárgyalásukhoz szükséges alapfeltételek, hogy a kétféle felfüggesztésre vonatkozó a , ill. c adat azonos ($a_{vf} = a_{ff} = a$ és $c_{vf} = c_{ff} = c$) [1].



1. ábra Vezetékgörbe (láncgörbe) vízszintes és ferde felfüggesztési közben és legnagyobb belógások

Az 1. ábrán látható egy vf -i közben (AB) lévő vezetékgörbe $y_{vf}(x)$ és a legnagyobb belógása, valamint egy ff -i közben (DB) lévő vezetékgörbe $y_{ff}(x)$ és a hozzá tartozó legnagyobb belógás. A két esetre két felfüggesztési köz egyenese vonatkozik, azok $y_{fk\ vf}(x)$ és $y_{fk\ ff}(x)$. A ferdeség ψ -vel van jelölve.

Bár a ff -i közök többnyire hegyes-dombos területen gyakoriak (2. ábra), teljesen sík területen is megtalálhatók, amikor az oszlopok nem egyformák. Egy ilyen példát a 3. ábra jól szemlélteti, ahol a két szomszédos oszlop láthatóan eltérő magasságú. (A vf -i közt a cikk 1. részének a 2. ábrája mutatja [1].)



2. ábra Ferde felfüggesztési köz hegyes-dombos területen [2]



3. ábra Ferde felfüggesztési köz sík területen, eltérő magasságú oszlopokkal

ÖSSZEFÜGGÉS b_{ff_max} ÉS b_{vf_max} KÖZÖTT

Új összefüggés

A cél az alábbi matematikai összefüggés meghatározása:

$$b_{ff_max} = b_{vf_max} + \Delta b_{max} \quad (1)$$

melynél a Δb_{max} a bemenő adatokkal kifejezett, azaz $\Delta b_{max} = \Delta b_{max}(a, h_1, h_2, c)$. Az alakja alapján, az (1) kifejezés a (2) [1] összefüggés speciális esetének tekinthető.

$$b_{ff}(x) = b_{vf}(x) + \Delta b(x), \quad x \in [0, a] \quad (2)$$

Ennek ellenére, az (1) nem vezethető le közvetlenül a (2) összefüggésből, mert a láncgörbe legnagyobb belógásának az elhelyezkedése vf és ff esetén nem azonos.

Azonban a b_{ff_max} és b_{vf_max} közötti összefüggés meghatározásához a (3) [3] képlet használható fel, mellyel a láncgörbe legnagyobb belógása számítható ki ff -i közben, a bemenő adatok (a, h_1, h_2, c) alapján. Ebben a képletben a $h_1 = h_2$

behelyettesítésével a (4) kifejezés adódik, mely azonban a v_f -i közre vonatkozik és az a , c adatokkal kifejezett, azaz $b_{vf_max}=b_{vf_max}(a,c)$.

$$b_{ff_max} = c \cdot \frac{h_2 - h_1}{a} \cdot \left(\frac{a}{2c} - \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} + \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{a} \right) - 2c \cdot \operatorname{sh}^2 \left(\frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{a} \right) + 2c \cdot \operatorname{sh}^2 \left(\frac{a}{4c} - \frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right) \quad (3)$$

$$b_{vf_max} = 2c \cdot \operatorname{sh}^2 \frac{a}{4c} \quad (4)$$

Figyelembe véve a (4), a (3) kifejezés jobb oldalának az (5) kifejezés bal oldalával való kibővítése után az egyenlőség továbbra is fennáll. Így módon a (6) adódik.

$$b_{vf_max} - 2c \cdot \operatorname{sh}^2 \frac{a}{4c} = 0 \quad (5)$$

$$b_{ff_max} = b_{vf_max} + c \cdot \frac{h_2 - h_1}{a} \cdot \left(\frac{a}{2c} - \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} + \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{a} \right) - 2c \cdot \operatorname{sh}^2 \left(\frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{a} \right) + 2c \cdot \operatorname{sh}^2 \left(\frac{a}{4c} - \frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right) - 2c \cdot \operatorname{sh}^2 \frac{a}{4c} \quad (6)$$

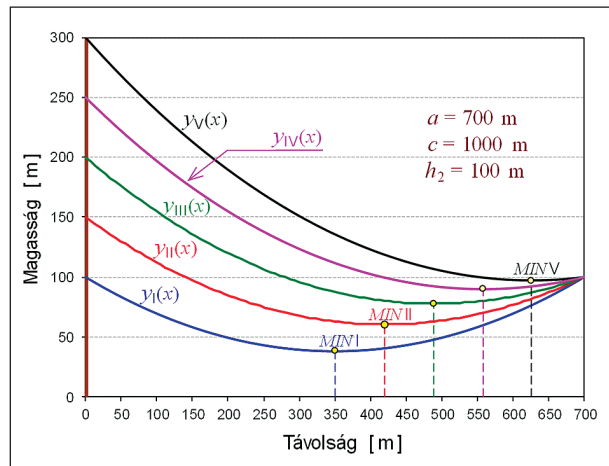
Tehát a (3) és (6) ekvivalens kifejezések. Mivel az utóbbi tartalmazza a b_{vf_max} -ot, így matematikai összefüggésnek tekinthető a b_{ff_max} és b_{vf_max} között, melynek egyszerű alakja az (1). A (6) egyenlet jobb oldalán, a b_{vf_max} után szereplő tagok együttesen az (1) kifejezés Δb_{max} tagját alkotják.

A (6) szerint, az adott b_{vf_max} alapján meghatározható a b_{ff_max} . Ez a módszer a következő példában került alkalmazásra. Az 1. táblázat a bemenő adatokat tartalmazza az öt különböző vezetékgyörbéhez, melyek a 4. ábrán szerepelnek. Az a , ill. c adat mind az öt esetben azonos. A vezeték legmélyebb pontja [3] a MIN jellel van feltüntetve. A (6) használatával nyert eredmények, a legnagyobb belógásra vonatkozóan, a 2. táblázatban vannak listázva. Egy külön oszlopban szerepelnek a Δb_{max} eredmények.

Példa:

1. táblázat Bemenő adatok

Adatok	I	II	III	IV	V
a [m]	700	700	700	700	700
h_1 [m]	100	150	200	250	300
h_2 [m]	100	100	100	100	100
c [m]	1000	1000	1000	1000	1000



4. ábra Vezetékgörbék közös ábrán

$$b_{vf_max} = 2c \cdot \operatorname{sh}^2 \frac{a}{4c} = 2 \cdot 10^3 \cdot \operatorname{sh}^2 \frac{700}{4 \cdot 10^3} = 61,878 \text{ m}$$

2. táblázat Legnagyobb belógások és Δb_{max}

Görbe	b_{vf_max} [m]	b_{ff_max} [m]	Δb_{max} [m]
$y_I(x)$	61,878	–	–
$y_{II}(x)$	–	62,030	0,152
$y_{III}(x)$	–	62,485	0,607
$y_{IV}(x)$	–	63,236	1,358
$y_V(x)$	–	64,273	2,395

A 2. táblázat alapján evidens, hogy $b_{ff_max} > b_{vf_max}$, valamint az eltérés e két belógás között (azaz Δb_{max}) nő a ferdeség, ill. $\Delta h = h_2 - h_1$ növelésével. Továbbá, Δb_{max} mindig pozitív.

Fontos említeni, hogy a legnagyobb belógás elhelyezkedése (x_c) az oszlopközben eltérő mind az öt, a 4. ábrán lévő vezetékgyörbe (láncgyörbe) esetén. Az x_c értékek a 3. táblázatban vannak feltüntetve, a (7) [3] képlet felhasználásával kerültek kiszámításra.

$$x_c = \frac{a}{2} + c \cdot \left(\operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{a} - \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right) \quad (7)$$

3. táblázat Legnagyobb belógások elhelyezkedése

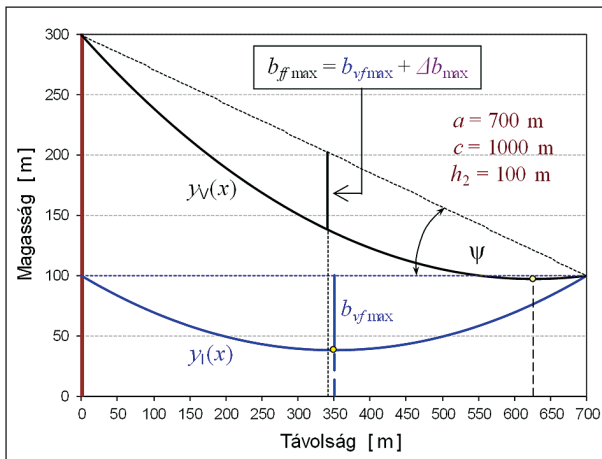
Görbe	$y_I(x)$	$y_{II}(x)$	$y_{III}(x)$	$y_{IV}(x)$	$y_V(x)$
x_c [m]	350	348,566	347,153	345,781	344,466

A (7) kifejezés egyszerű alakja a (8):

$$x_c = \frac{a}{2} + \Delta x; \quad \Delta x \begin{cases} > 0, & \text{ha } h_1 < h_2 \\ = 0, & \text{ha } h_1 = h_2 \\ < 0, & \text{ha } h_1 > h_2 \end{cases} \quad (8)$$

Az $y_I(x)$ esetében $h_1 = h_2$, így $\Delta x = 0$ és $x_c = a/2$. Azonban, az $y_{II}(x)$, $y_{III}(x)$, $y_{IV}(x)$, ill. $y_V(x)$ esetében $h_1 > h_2$, így $\Delta x < 0$ és $x_c < a/2$.

Az 5. ábrán az $y_I(x)$ és $y_V(x)$ vezetékgyörbék és a legnagyobb belógásai szerepelnek közös ábrán. Látható a két belógás elhelyezkedésének az eltérése.



5. ábra Vezetékgörbék $y_I(x)$ és $y_V(x)$ és legnagyobb belógásai

Meglévő összefüggés $b_{ff\max}$ és $b_{vf\max}$ között

A szabadvezetékes hálózat tervezésével foglalkozó korábbi szakirodalomban [4], valamint az arra vonatkozó régebbi szabványban [5] a következő képlet található a láncgörbe legnagyobb belógásának a számítására ferde felfüggesztés esetén:

$$b = \frac{c}{a} \cdot \frac{2\sigma}{\gamma} \cdot \text{sh}^2 \frac{a\gamma}{4\sigma} \quad (9)$$

ahol,

b láncgörbe legnagyobb belógása;

c felfüggesztési pontok közötti távolság;

a oszlopköz hossza;

σ/γ láncgörbe paramétere.

Az ebben a cikkben használt jelölések alkalmazásával az előző képlet a következő alakban írható fel:

$$b_{ff\max}^* = \frac{\sqrt{a^2 + (h_2 - h_1)^2}}{a} \cdot 2c \cdot \text{sh}^2 \frac{a}{4c} \quad (10)$$

Itt bevezetésre került a $b_{ff\max}^*$ jelölés, a (3) kifejezéstől való megkülönböztetése végett. Az első tört a (10) képlet jobb oldalán tulajdonképpen az $1/\cos\psi$ szorzófaktor [1] képezi, míg a fennmaradó rész a láncgörbe legnagyobb belógását vf esetén. Így a (10) kifejezés egyszerű alakja a (11), amely megfelel a [6] szakkönyvben szereplőnek:

$$b_{ff\max}^* = \frac{1}{\cos\psi} \cdot b_{vf\max} \quad (11)$$

Matematikailag ez a kifejezés több okból is közelítő összefüggésnek tekinthető. Egyrészt különbözik a pontos (3) összefüggéstől, másrészt a (11) tulajdonképpen a (12) [1] közelítő összefüggésnek az egyszerűsítése.

$$b_{ff}(x) = \frac{1}{\cos\psi} \cdot b_{vf}(x), \quad x \in [0, a] \quad (12)$$

Felvetődik a kérdés, hogy mekkora hibát eredményez a (11) használata. A 4. táblázat tartalmazza mind a közelítő, mind pedig a pontos összefüggés alkalmazásával kapott eredményeket, a láncgörbe legnagyobb belógására vonatkozóan ff esetén, a fenti példában. A hiba értéke a (13) egyenlet segítségével került meghatározásra minden egyes ff -i köz esetén.

$$J = b_{ff\max}^* - b_{ff\max} = \frac{b_{vf\max}}{\cos\psi} - b_{ff\max} \quad (13)$$

4. táblázat Legnagyobb belógások, közelítő és pontos eredmények, hiba értéke

Görbe	$b_{ff\max}^*$ [m]	$b_{ff\max}$ [m]	$b_{ff\max}^* - b_{ff\max}$ [m]
$y_I(x)$	–	–	–
$y_{II}(x)$	62,035	62,030	0,005
$y_{III}(x)$	62,506	62,485	0,021
$y_{IV}(x)$	63,283	63,236	0,047
$y_V(x)$	64,354	64,273	0,081

ÖSSZEFOGLALÁS

A cikk matematikai hátteret ad az $1/\cos\psi$ szorzófaktor a láncgörbe belógására való hatásának tárgyalásához. Míg a cikk 1. része a láncgörbe belógására vonatkozó olyan összefüggést ismerttet, amely az oszlopköz bármely pontján alkalmazható, a cikk 2. részében tárgyalt összefüggés (mind pontos, mind pedig közelítő) kizárólag a legnagyobb belógásra vonatkozik.

A 4. táblázat alapján megállapítható, hogy az $1/\cos\psi$ szorzófaktor tartalmazó közelítő összefüggés használatával eredményezett hiba értéke nem jelentős, viszont nő a ferdeség növelésével. Azonban azt is meg kell említeni, hogy közelítő összefüggés esetén nem szükséges a láncgörbe paraméterének ismerete, míg pontos összefüggés esetén igen, a (14), ill. (15) szerint.

$$b_{ff\max}^* = b_{ff\max}^*(b_{vf\max}, a, h_1, h_2) \quad (14)$$

$$b_{ff\max} = b_{ff\max}(b_{vf\max}, a, h_1, h_2, c) \quad (15)$$

Továbbá, a két összefüggésre a következő egyenlőtlenség érvényes:

$$b_{ff\max}^* > b_{ff\max} \quad (16)$$

A cikk 1. részében szereplő 3. ábra, illetve a cikk 2. részében szereplő 4. ábra egymásnak tükörképe. A két gyakorlati példa alapján, amelyekhez ezek az ábrák tartoznak, könnyen belátható, hogy a cikkben bemutatott levezetések mindkét típusú ferde felfüggesztési köz esetén ($h_1 < h_2$ és $h_1 > h_2$) egyaránt érvényesek.

Irodalomjegyzék

- [1] **Hatibovic A.:** Láncgörbe belógására vonatkozó speciális összefüggések 1. rész, Elektrotechnika, 108. évfolyam, 10. szám, 2015.
- [2] **IDAHO POWER:** Transmission Line Design, 2013, http://www.oregon.gov/Energy/Siting/docs/Meeting_Materials/031513/ItemG_Idaho_Power_presentation_031513.pdf [Online]
- [3] **Hatibovic A.:** Derivation of Equations for Conductor and Sag Curves of an Overhead Line Based on a Given Catenary Constant, PERIODICA POLYTECHNICA ELECTRICAL ENGINEERING, Vol. 58, No. 1, pp. 23–27, 2014, DOI: 10.3311/PPEe.6993
- [4] **Tervezési segédlet II,** Magyar Villamos Művek Tröszt, Budapest, 1991.
- [5] **MSZ 151-1:1986.** Erőáramú szabadvezeték, Nagyfeszültségű szabadvezetékek létesítési előírásai, Magyar Szabványügyi Hivatal, Budapest, 1986.
- [6] **Bayliss C., Hardy B.:** Transmission and Distribution Electrical Engineering 4th Edition, Elsevier, Great Britain, 2012.



Hatibovic Alen

okleveles villamosmérnök,

egyéni vállalkozó, tervező

MEE-tag

hatibovic.alen@gmail.com